

因式分解进阶二（加油站）

一、换元法

1. 直接换元法

1. 因式分解： $(x^2 - x)(x^2 - x - 14) + 24$ 的结果是（ ）.

A. $(x^2 - x - 3)(x^2 - x - 8)$

B. $(x^2 - x - 2)(x^2 - x - 12)$

C. $(x - 2)(x + 1)(x - 4)(x + 3)$

D. $(x + 1)(x + 2)(x - 4)(x + 3)$

【答案】C

【解析】令 $x^2 - x = t$ ，则原式 $= t(t - 14) + 24 = t^2 - 14t + 24$

$$= (t - 2)(t - 12)$$

$$= (x^2 - x - 2)(x^2 - x - 12)$$

$$= (x - 2)(x + 1)(x - 4)(x + 3)$$

故选C.

【标注】【知识点】二次项系数为 ± 1 的十字相乘；换元法

2. 若 $(x + y)(x + 2 + y) = 15$ ，则 $x + y = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】-5或3

【解析】令 $x + y = a$ ，则 $a(a + 2) = 15$ ，

$$\therefore a^2 + 2a - 15 = 0,$$

$$\therefore (a + 5)(a - 3) = 0,$$

$$\text{则 } a + 5 = 0 \text{ 或 } a - 3 = 0,$$

$$\text{解得：} a = -5 \text{ 或 } a = 3,$$

$$\text{即 } x + y = -5 \text{ 或 } x + y = 3.$$

故答案为：-5或3.

【标注】【知识点】换元法

3. 因式分解： $(x^2 - x)^2 - 14(x^2 - x) + 24$.

【答案】 $(x - 2)(x + 1)(x - 4)(x + 3)$.

【解析】 原式 $= (x^2 - x - 2)(x^2 - x - 12)$,
 $= (x - 2)(x + 1)(x - 4)(x + 3)$.

【标注】 【知识点】 双十字相乘法

4. 因式分解： $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3(x^2 + 4x + 8) + 2$.

【答案】 $(x^2 + 4x + 10)(x^2 + 4x + 9)$.

【解析】 令 $t = x^2 + 4x + 8$ 则原式为 $t^2 + 3t + 2 = (t + 2)(t + 1)$,
所以 $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3(x^2 + 4x + 8) + 2$,
 $= (x^2 + 4x + 8 + 2)(x^2 + 4x + 1)$,
 $= (x^2 + 4x + 10)(x^2 + 4x + 9)$,
故答案为： $(x^2 + 4x + 10)(x^2 + 4x + 9)$.

【标注】 【知识点】 换元法；二次项系数为 ± 1 的十字相乘

5. 分解因式： $(x^2 + 4)(x^2 + 6) - 48$.

【答案】 $(x^2 + 12)(x^2 - 2)$.

【解析】 令 $x^2 + 4 = a$

$$\text{原式} = a(a + 2) - 48 = a^2 + 2a - 48$$

$$= (a + 8)(a - 6)$$

$$= (x^2 + 12)(x^2 - 2) .$$

【标注】 【知识点】换元法

6. 分解因式：

(1) $(x^2 - x - 3)(x^2 - x - 5) - 8$.

(2) $(x^2 - x - 3)(x^2 - x - 5) - 3$.

(3) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$.

【答案】 (1) $(x^2 - x - 1)(x^2 - x - 7)$.

(2) $(x + 1)(x - 2)(x + 2)(x - 3)$.

(3) $(x - 1)(x + 2)(x^2 + x + 5)$.

【解析】 (1) 原式 $= (x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 15 - 8$,

$$= (x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 7 ,$$

$$= (x^2 - x - 1)(x^2 - x - 7) .$$

(2) 原式 $= (x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12$,

$$= (x^2 - x - 2)(x^2 - x - 6) ,$$

$$= (x + 1)(x - 2)(x + 2)(x - 3) .$$

(3) 原式 $= (x^2 + x)^2 + 3(x^2 + x) - 10$,

$$= (x^2 + x - 2)(x^2 + x + 5) ,$$

$$= (x-1)(x+2)(x^2+x+5).$$

【标注】【知识点】换元法

7. 回答下列问题.

(1) 填空: $a^2 + 6a + \underline{\quad} = (a + \underline{\quad})^2$.

(2) 阅读, 并解决问题:

分解因式 $(a+b)^2 + 2(a+b) + 1$.

解: 设 $a+b=x$, 则原式 $= x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = (a+b+1)^2$.

这样的解题方法叫做“换元法”, 即当复杂的多项式中, 某一部分重复出现时, 我们用字母将其替换, 从而简化这个多项式. 换元法是一个重要的数学方法, 不少问题能用换元法解决. 请你用“换元法”对下列多项式进行因式分解:

① $(m+n)^2 - 14(m+n) + 49$.

② $(x^2 - 4x + 2)(x^2 - 4x + 6) + 4$.

【答案】(1) 9; 3

(2) ① $(m+n-7)^2$.

② $(x-2)^4$.

【解析】(1) $a^2 + 6a + 9 = (a+3)^2$,

故答案为: 9, 3.

(2) ① $(m+n)^2 - 14(m+n) + 49$,

设 $m+n=x$,

则原式 $= x^2 - 14x + 49 = (x-7)^2 = (m+n-7)^2$.

② $(x^2 - 4x + 2)(x^2 - 4x + 6) + 4$,

$= (x^2 - 4x)^2 + 6(x^2 - 4x) + 2(x^2 - 4x) + 12 + 4$,

$= (x^2 - 4x)^2 + 8(x^2 - 4x) + 16$,

设 $x^2 - 4x = a$,

则原式 $= a^2 + 8a + 16 = (a+4)^2 = (x^2 - 4x + 4)^2 = (x-2)^4$.

【标注】【知识点】换元法

2. 先变形再换元

8. 因式分解： $(x+1)(x+2)(x+3)(x+6)+x^2=$ _____.

【答案】 $(x^2+6x+6)^2$

【解析】运用分组分解和换元法，

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (x+1)(x+6)(x+2)(x+3)+x^2 \\ &= (x^2+7x+6)(x^2+5x+6)+x^2 \\ \text{设 } (x^2+5x+6) &= a, \\ \text{则原式} &= (a+2x)a+x^2 \\ &= (a+x)^2 \\ &= (x^2+6x+6)^2\end{aligned}$$

【标注】【知识点】重组重解

9. 分解因式： $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$.

【答案】 $(x^2+5x+5)^2$.

【解析】 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$
 $= [(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]+1$
 $= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1,$
令 $x^2+5x+4=u,$
 $\therefore$ 上式 $= u(u+2)+1 = (u+1)^2 = (x^2+5x+5)^2,$
即 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1 = (x^2+5x+5)^2.$

【标注】【知识点】换元法

10. 分解因式： $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-24$.

【答案】 $(x^2+7x+16)(x+1)(x+6)$.

【解析】 原式 = $(x^2+7x+10)(x^2+7x+12)-24$,

$$\text{令 } x^2+7x+11=a ,$$

$$\text{原式} = (a-1)(a+1)-24 ,$$

$$= a^2-1-24 ,$$

$$= a^2-25 ,$$

$$= (a+5)(a-5) ,$$

$$= (x^2+7x+16)(x^2+7x+6) ,$$

$$= (x^2+7x+16)(x+1)(x+6) .$$

【标注】 【知识点】 换元法

11. 分解因式： $(x^2-1)(x+3)(x+5)+12$.

【答案】 $(x^2+4x-3)(x^2+4x+1)$.

【解析】 原式 = $[(x+1)(x+3)][(x-1)(x+5)]+12$

$$= (x^2+4x+3)(x^2+4x-5)+12 ,$$

$$\text{令 } x^2+4x=t ,$$

$$\text{则原式} = (t-5)(t+3)+12 = t^2-2t-3 = (t-3)(t+1) ,$$

$$= (x^2 + 4x - 3)(x^2 + 4x + 1) .$$

【标注】【知识点】二次项系数为 ± 1 的十字相乘；换元法

12. 分解因式：

$$(1) (x^2 + 6x + 8)(x^2 + 14x + 48) + 12 .$$

$$(2) (x^2 + 3x + 2)(4x^2 + 8x + 3) - 90 .$$

【答案】 (1) $(x^2 + 10x + 18)(x^2 + 10x + 22) .$

(2) $(x - 1)(2x + 7)(2x^2 + 5x + 12) .$

【解析】 (1) 原式 $= (x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 12$

$$= (x + 2)(x + 8)(x + 4)(x + 6) + 12$$

$$= (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 24) + 12 ,$$

$$\text{令 } x^2 + 10x + 20 = t ,$$

$$\text{原式} = (t - 4)(t + 4) + 12$$

$$= t^2 - 4$$

$$= (t - 2)(t + 2)$$

$$= (x^2 + 10x + 18)(x^2 + 10x + 22) .$$

(2) 原式 $= (x + 1)(x + 2)(2x + 1)(2x + 3) - 90$

$$= (x + 1)(2x + 3)(x + 2)(2x + 1) - 90$$

$$= (2x^2 + 5x + 3)(2x^2 + 5x + 2) - 90 ,$$

$$\text{令 } 2x^2 + 5x = t ,$$

$$\text{则原式} = (t + 3)(t + 2) - 90$$

$$= t^2 + 5t - 84$$

$$= (t + 12)(t - 7)$$

$$= (2x^2 + 5x + 12)(2x^2 + 5x - 7)$$

$$= (x - 1)(2x + 7)(2x^2 + 5x + 12) .$$

【标注】【能力】运算能力

【方法】换元法

【知识点】换元法

13. 分解因式：

(1) $(a-1)(a-2)(a-3)(a-4) - 24$.

(2) $(x^2 + 3x + 2)(3 + 8x + 4x^2) - 90$.

(3) $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12) - 3x^2$.

【答案】(1) $a(a-5)(a^2-5a+10)$.

(2) $(x-1)(2x+7)(2x^2+5x+12)$.

(3) $(x+8)(2x+15)(2x^2+35x+120)$.

【解析】(1) 原式 $= (a^2 - 5a + 4)(a^2 - 5a + 6) - 24$, 令 $t = a^2 - 5a + 4$,

原式 $= t(t+2) - 24 = t^2 + 2t - 24 = (t+6)(t-4)$,

将 $t = a^2 - 5a + 4$ 回代得：

原式 $= (a^2 - 5a)(a^2 - 5a + 10) = a(a-5)(a^2 - 5a + 10)$.

(2) 原式 $= (x+1)(x+2)(2x+1)(2x+3) - 90$,

$= (2x^2 + 5x + 3)(2x^2 + 5x + 2) - 90$,

令 $t = 2x^2 + 5x + 2$ 可得：

原式 $= t^2 + t - 90 = (t+10)(t-9)$,

将代回 $t = 2x^2 + 5x + 2$ 可得：

原式 $= (2x^2 + 5x + 2 + 10)(2x^2 + 5x + 2 - 9)$,

$= (2x^2 + 5x + 12)(2x^2 + 5x - 7)$,

$= (x-1)(2x+7)(2x^2 + 5x + 12)$.

(3) 原式 $= 4(x^2 + 17x + 60)(x^2 + 16x + 60) - 3x^2$, 令 $t = x^2 + 16x + 60$,

则原式 $= 4(t+x)t - 3x^2 = 4t^2 + 4xt - 3x^2 = (2t+3x)(2t-x)$,

将 $t = x^2 + 16x + 60$ 代回得：

原式 $= (2x^2 + 32x + 120 + 3x)(2x^2 + 32x + 120 - x)$,

$$= (x+8)(2x+15)(2x^2+35x+120) .$$

【标注】【知识点】换元法

3. 平均值换元

14. 分解因式： $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12) - 15x^2$.

【答案】 $(2x^2+37x+120)(2x^2+29x+120)$.

【解析】原式 $= 4(x^2+17x+60)(x^2+16x+60) - 15x^2$
 $= (2x^2+34x+120)(2x^2+32x+120) - 15x^2$
 令 $\mu = 2x^2+33x+120$,
 则原式 $= (\mu+x)(\mu-x) - 15x^2$
 $= \mu^2 - 16x^2$
 $= (\mu+4x)(\mu-4x)$
 $= (2x^2+33x+120+4x)(2x^2+33x+120-4x)$
 $= (2x^2+37x+120)(2x^2+29x+120) .$

【标注】【知识点】换元法

15. 在有理数范围内分解因式 .

(1) $a^3 - b^3 + a^2b - ab^2$.

(2) $(c^2 - a^2 - b^2)^2 - 4a^2b^2$.

(3) $(a^2 + 5a + 4)(a^2 + 5a + 6) - 120$.

【答案】(1) $(a-b)(a+b)^2$.

(2) $(c+a+b)(c-a-b)(c+a-b)(c-a+b)$.

(3) $(a^2+5a+16)(a+6)(a-1)$.

【解析】(1) $a^3 - b^3 + a^2b - ab^2$

$$= (a^3 - b^3) + (a^2b - ab^2)$$

$$= (a-b)(a^2 + ab + b^2) + ab(a-b)$$

$$= (a-b)(a^2 + ab + b^2 + ab)$$

$$= (a-b)(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$= (a-b)(a+b)^2.$$

(2) $(c^2 - a^2 - b^2)^2 - 4a^2b^2$

$$= (c^2 - a^2 - b^2) - (2ab)^2$$

$$= (c^2 - a^2 - b^2 - 2ab)(c^2 - a^2 - b^2 + 2ab)$$

$$= [c^2 - (a^2 + b^2 + 2ab)][c^2 - (a-b)^2]$$

$$= (c+a+b)(c-a-b)(c+a-b)(c-a+b).$$

(3) $(a^2 + 5a + 4)(a^2 + 5a + 6) - 120$.

$$\text{令 } a^2 + 5a + 5 = M.$$

$$\text{原式} = (M-1)(M+1) - 120$$

$$= M^2 - 1 - 120$$

$$= M^2 - 121$$

$$= (M+11)(M-11).$$

$$\therefore = (a^2 + 5a + 16)(a^2 + 5a - 6)$$

$$= (a^2 + 5a + 16)(a+6)(a-1).$$

【标注】【知识点】换元法

二、拆项、添项法

16. 分解因式： $4x^4 + 1$.

【答案】 $(2x^2 + 2x + 1)(2x^2 - 2x + 1)$.

【解析】 原式 $= 4x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^2$
 $= (2x^2 + 1)^2 - 4x^2$
 $= (2x^2 + 2x + 1)(2x^2 - 2x + 1)$.

【标注】 【知识点】 拆添项法

17. 因式分解： $x^4 - 3x^2 + 1$.

【答案】 $(x^2 - 1 - x)(x^2 - 1 + x)$.

【解析】 $x^4 - 3x^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 - 1)^2 - x^2 = (x^2 - 1 - x)(x^2 - 1 + x)$.

【标注】 【知识点】 拆添项法

18. 因式分解： $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

【答案】 $(x^2 + x + 1)^2$.

【解析】 $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$
 $= (x^4 + 2x^3 + x^2) + (2x^2 + 2x) + 1$

$$\begin{aligned}
 &= x^2(x^2 + 2x + 1) + 2x(x + 1) + 1 \\
 &= x^2(x + 1)^2 + 2x(x + 1) + 1 \\
 &= [x(x + 1) + 1]^2 \\
 &= (x^2 + x + 1)^2.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】利用完全平方公式因式分解

19. 分解因式： $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3$.

【答案】 $(x + 1)(x + 3)(x - 1)^2$.

【解析】 原式 $= (x^4 - x^2) + (2x^3 - 2x) - (3x^2 - 3)$
 $= x^2(x^2 - 1) + 2x(x^2 - 1) - 3(x^2 - 1)$
 $= (x^2 - 1)(x^2 + 2x - 3)$
 $= (x + 1)(x - 1)(x^2 + 2x + 1 - 4)$
 $= (x + 1)(x + 3)(x - 1)^2$.

【标注】【知识点】拆添项法

20. 因式分解：

(1) $x^3 - 4x^2 + 6x - 4$.

(2) $2x^4 + x^3 + 7x^2 + 4x - 4$.

【答案】 (1) $(x - 2)(x^2 - 2x + 2)$.

$$(2) (x+1)(2x-1)(x^2+4).$$

【解析】(1) 原式 = $(x-2)(x^2-2x+2)$.

$$(2) \text{原式} = (x+1)(2x-1)(x^2+4).$$

【标注】【能力】运算能力

【知识点】其他方法

21. 因式分解：

$$(1) x^3 + 2x^2 - 5x - 6.$$

$$(2) a^3 + 3a^2 + 3a + 2.$$

【答案】(1) $(x+1)(x+3)(x-2)$.

$$(2) (a+2)(a^2+a+1).$$

【解析】(1) 原式 = $(x^3 + x^2) + (x^2 - 5x - 6)$

$$= x^2(x+1) + (x-6)(x+1)$$

$$= (x+1)(x^2 + x - 6)$$

$$= (x+1)(x+3)(x-2).$$

$$(2) \text{解法一：原式} = (a^3 + 3a^2 + 3a + 1) + 1 = (a+1)^3 + 1^3$$

$$= (a+1+1)[(a+1)^2 - (a+1) + 1]$$

$$= (a+2)(a^2 + a + 1).$$

$$\text{解法二：原式} = (a^3 + 2a^2) + (a^2 + 2a) + (a+2)$$

$$= a^2(a+2) + a(a+2) + (a+2)$$

$$= (a+2)(a^2 + a + 1).$$

$$\text{解法三：原式} = (a^3 + a^2 + a) + (2a^2 + 2a + 2)$$

$$= a(a^2 + a + 1) + 2(a^2 + a + 1)$$

$$= (a+2)(a^2 + a + 1).$$

$$\text{解法四：原式} = (a^3 - 1) + (3a^2 + 3a + 3)$$

$$= (a-1)(a^2 + a + 1) + 3(a^2 + a + 1)$$

$$= (a+2)(a^2+a+1).$$

【标注】【知识点】拆添项法

22. 分解下列因式：

(1) $a^4 - 11a^2 + 1$.

(2) $a^4 + 5a^2 + 9$.

(3) $9x^4 + 2x^2y^2 + y^4$.

【答案】(1) $(a^2 + 3a - 1)(a^2 - 3a - 1)$.

(2) $(a^2 - a + 3)(a^2 + a + 3)$.

(3) $(3x^2 + 2xy + y^2)(3x^2 - 2xy + y^2)$.

【解析】(1) 原式 $= a^4 - 2a^2 + 1 - 9a^2 = (a^2 + 3a - 1)(a^2 - 3a - 1)$.

(2) 原式 $= (a^2 - a + 3)(a^2 + a + 3)$.

(3) 原式 $= (3x^2 + 2xy + y^2)(3x^2 - 2xy + y^2)$.

【标注】【知识点】拆添项法

23. 分解因式：

(1) $x^4 + 3x^2 + 4$.

(2) $x^8 + x^4 + 1$.

(3) $x^4 - 7x^2y^2 + 81y^4$.

(4) $x^2 - y^2 + 2x + 6y - 8$.

【答案】 (1) $(x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2)$.

(2) $(x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x)(x^4 + 1 - x^2)$.

(3) $(x^2 + 9y^2 - 5xy)(x^2 + 9y^2 + 5xy)$.

(4) $(x - y + 4)(x + y - 2)$.

【解析】 (1) $x^4 + 3x^2 + 4$

$$= x^4 + 4x^2 + 4 - x^2$$

$$= (x^2 + 2)^2 - x^2$$

$$= (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2) .$$

(2) $x^8 + x^4 + 1$

$$= x^8 + 2x^4 + 1 - x^4$$

$$= (x^4 + 1 + x^2)(x^4 + 1 - x^2)$$

$$= (x^4 + 1 + 2x^2 - x^2)(x^4 + 1 - x^2)$$

$$= (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x)(x^4 + 1 - x^2) .$$

(3) $x^4 - 7x^2y^2 + 81y^4$

$$= x^4 + 18x^2y^2 + 81y^4 - 25x^2y^2$$

$$= (x^2 + 9y^2)^2 - 25x^2y^2$$

$$= (x^2 + 9y^2 - 5xy)(x^2 + 9y^2 + 5xy) .$$

(4) $x^2 - y^2 + 2x + 6y - 8$

$$= x^2 + 2x + 1 - (y^2 - 6y + 9)$$

$$= (x + 1)^2 - (y - 3)^2$$

$$= (x + 1 - y + 3)(x + 1 + y - 3)$$

$$= (x - y + 4)(x + y - 2) .$$

【标注】【知识点】拆添项法

24. 系数引导型添拆项法：

分解下列因式：

(1) $x^3 - 3x^2 + 4$.

(2) $x^3 + x^2 - 12$.

(3) $x^4 + x^3 + 4x^2 + 3x + 3$.

【答案】(1) $(x+1)(x-2)^2$.

(2) $(x-2)(x^2+3x+6)$.

(3) $(x^2+3)(x^2+x+1)$.

【解析】(1) 原式 = $(x+1)(x-2)^2$.

(2) 原式 = $(x-2)(x^2+3x+6)$.

(3) 原式

$$= (x^4 + x^3 + x^2) + (3x^2 + 3x + 3) = x^2(x^2 + x + 1) + 3(x^2 + x + 1) = (x^2 + 3)(x^2 + x + 1)$$

【标注】【知识点】拆添项法

三、立方和、立方差公式

25. 利用立方和、立方差公式填空：

$$(2m+n^2)(4m^2-2mn^2+n^4) = \underline{\hspace{2cm}} .$$

【答案】 $8m^3 + n^6$

【解析】 $8m^3 + n^6$

【标注】【知识点】和与差的立方公式

26. 计算： $(x+1)(x^2-x+1)$.

【答案】 $x^3 + 1$.

【解析】原式 $= x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1 = x^3 + 1$.

【标注】【知识点】和与差的立方公式

27. 已知 $a + b = 3$, 且 $ab = 2$, 则 $a^3 + b^3$ 的值为 _____ .

【答案】9

【解析】法一： $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)[(a + b)^2 - 3ab] = 9$;

法二：由 $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$,

得 $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 3^3 - 3 \times 2 \times 3 = 9$.

【标注】【知识点】整式乘除化简求值-整体代入化简求值

28. 已知 $x - y = 3$, $xy = 5$, 则 $x^3 - y^3$ 的值为 _____ .

【答案】72

【解析】 $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = (x - y)[(x - y)^2 + 3xy] = 3 \times (9 + 15) = 3 \times 24 = 72$.

【标注】【知识点】整式乘除化简求值-条件化简求值

29. 已知 $x - y = 4$, 求 $x^3 - y^3 - 12xy$ 的值 .

【答案】64

【解析】 $x^3 - y^3 - 12xy = x^3 - y^3 - 3xy(x - y) = (x - y)^3 = 64$.

【标注】【知识点】和与差的立方公式

30. 已知 $x + y = 10$, $x^3 + y^3 = 280$, 求 $x^2 + y^2$ 的值 .

【答案】 52 .

【解析】 方法一：由 $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$,

得 $1000 - 3xy \times 10 = 280$, 即 $xy = 24$.

所以 $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 52$.

方法二： $x^3 + y^3 = (x + y)[(x + y)^2 - 3xy] = 280$,

$\therefore xy = 24$, 同理 $x^2 + y^2 = 52$.

方法三：消元思想：

由 $x = 10 - y$,

$\therefore x^2 + y^2 = 2y^2 - 20y + 100$,

而 $x^3 + y^3 = 1000 - 300y + 30y^2 - y^3 + y^3 = 30(y^2 - 10y) + 1000$
 $= 280$,

$\therefore y^2 - 10y = -24$,

$\therefore x^2 + y^2 = 2y^2 - 20y + 100x^2 + y^2 = 52$.

【标注】 【知识点】 和与差的立方公式

31. 利用立方和（差）公式填空：

(1) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) = \underline{\hspace{2cm}}$;

(3) $(x - 2)(x + 2)(x^4 + 4x^2 + 16) = \underline{\hspace{2cm}}$;

(4) $8a^3 + 125b^3 = (2a + 5b) \underline{\hspace{2cm}}$;

(5) $\frac{1}{27}a^3 - \frac{1}{8}b^3 = \left(\frac{a}{3} - \frac{b}{2}\right) \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】(1) $x^3 - 8$

(2) $8x^3 - 1$

(3) $x^6 - 64$

(4) $(4a^2 - 10ab + 25b^2)$

(5) $\left(\frac{a^2}{9} + \frac{ab}{6} + \frac{b^2}{4}\right)$

【解析】(1) $(x+2)(x^2-2x+4) = x^3 - 8$.

(2) $(2x-1)(4x^2+2x+1) = 8x^3 - 1$.

(3) $(x-2)(x+2)(x^4+4x^2+16) = x^6 - 64$.

(4) $8a^3 + 125b^3 = (2a+5b)(4a^2-10ab+25b^2)$.

(5) $\frac{1}{27}a^3 - \frac{1}{8}b^3 = \left(\frac{a}{3} - \frac{b}{2}\right)\left(\frac{a^2}{9} + \frac{ab}{6} + \frac{b^2}{4}\right)$.

【标注】【知识点】和与差的立方公式

32. 计算

(1) $(1-x)(x^2+x+1)$.

(2) $\left(\frac{1}{2}x-y\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x+y\right)^2$.

【答案】(1) $-x^3 + 1$.

(2) $\frac{1}{2}x^2 + 2y^2$.

【解析】(1) $(1-x)(x^2+x+1) = -x^3 + 1$.

(2) $\left(\frac{1}{2}x-y\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x+y\right)^2 = \frac{1}{2}x^2 + 2y^2$.

【标注】【知识点】完全平方公式的计算-不含分式

33. 因式分解：

(1) $(a^2 + 4b^2 - 4)^2 - 4a^2b^2$

(2) $(5a^2 - 3b^2)^2 - (3a^2 - 5b^2)^2$

(3) $a^4b - ab^4$

(4) $2x^4 + 54xy^3$

(5) $a^6 + b^6$

【答案】 (1) $(a^2 - 2ab + 4b^2 - 4)(a^2 + 2ab + 4b^2 - 4)$.

(2) $16(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$.

(3) $ab(a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

(4) $2x(x + 3y)(x^2 - 3xy + 9y^2)$.

(5) $(a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$.

【标注】【知识点】利用平方差公式因式分解

34. 已知 $x + y = 3$, $xy = 2$, 求

(1) $x - y$.

(2) $x^3 + y^3$.

【答案】 (1) ± 1 .

(2) 9 .

【解析】 (1) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 9$, 故 $x^2 + y^2 = 5$, 则

$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = 1$, 故 $x - y = \pm 1$.

(此时也可以通过解二元一次方程组解出 x, y)

故答案为： ± 1 .

$$(2) x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 3 \times (5 - 2) = 9 .$$

故答案为： 9 .

【标注】【知识点】和与差的立方公式

35. 解答下列各题 .

(1) 已知 $a + b = 4$, $ab = 2$, 求 $a^2 + b^2$, $a^3 + b^3$ 的值 .

(2) 已知 $a + b = 1$, $a^2 + b^2 = 3$, 求 $a^3 + b^3$ 和 $a^4 + b^4$ 的值 .

【答案】 (1) $a^2 + b^2 = 12$, $a^3 + b^3 = 40$.

(2) $a^3 + b^3 = 4$, $a^4 + b^4 = 7$.

【解析】 (1) $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 12$,

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = 40 .$$

故答案为： $a^2 + b^2 = 12$, $a^3 + b^3 = 40$.

(2) 由 $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ 得 $ab = -1$,

$$\text{所以 } a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = 4 , a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = 7$$

.

故答案为： $a^3 + b^3 = 4$, $a^4 + b^4 = 7$.

【标注】【知识点】完全平方公式的计算-不含分式